Μονωνυμικές Διατάξεις

$K[x_1, x_2, .., x_n]$, K: σώμα

<u>Ορισμος:</u> Ενα μονωνυμο M ειναι ενα πολυωνυμο του $K[x_1, .., x_n]$ της μορφης $M = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}$ οπου $a_1, .., a_n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, ..\}$

Ο φυσικος αριθμος $a_1 + a_2 \dots + a_n$ λεγεται βαθμος του M και συμβολιζεται με $deg(M)$

$\boxed{\text{Πχ}}$ $K[x_1, x_2, x_3]$

Μονωνυμα $x_1^3 x_2^0 x_3^0$, $x_1 x_2 x_3$, $x_1^0 x_2^7 x_3^5$, $x_1 x_2^4 x_3^0$

ο βαθμος του μονωνυμου ειναι το αθροισμα των εκθετων

$deg(x_1^0 x_2^7 x_3^5) = 0 + 7 + 5 = 12$

$\mathbb{T}^n$: Το συνολο ολων των μονωνυμων του $K[x_1,..,x_n]$

Στα μονωνυμα δε με ενδιαφερει το σημειο που βρισκομαι, ανεξαρτητα K

$\mathbb{T}^1 = \{1 = x_1^0, x_1, x_1^2, .., x_1^n, ..\}$:απειρο συνολο

$\mathbb{T}^2 = \{ 1, \cancel{x_1}, x_1^2, \cancel{x_1^3}, .., $
$x_2, x_1x_2, x_1^2x_2, x_1^3x_2 \dots$
$x_2^2, x_1x_2^2, x_1^2x_2^2, \dots$
$x_2^3, x_1x_2^3, x_1^2x_2^3, \dots \}$

$\mathbb{N}_0^2$

Υπαρχει μια 1-1 και επι αντιστοιχια αναμεσα στο $\mathbb{T}^n$ και στο $\mathbb{N}_0^n$

$\mathbb{T}^n \qquad \mathbb{N}_0^n$

$x^a = x_1^{a_1} x_2^{a_2} .. x_n^{a_n} \longrightarrow (a_1, a_2, .., a_n) = a$

x^a : μονωνυμο

$x^{(0,1,2,3,7)} = x_1^0 x_2^1 x_3^2 x_4^3 x_5^7 \qquad (n=5)$

$x^{(7,1,0,0)} = x_1^7 x_2^1 \cdot x_3^0 x_4^0 = x_1^7 \cdot x_2^1$

$x^{(0,0,0,0)} = 1$

Ορισμος: Μια μερικη διαταξη σε ενα συνολο S ειναι μια σχεση $<$ με τις εξης ιδιοτητες:

i) δεν ισχυει $t < t$ για οποιοδηποτε $t \in S$

και ii) αν $t_1 < t_2$, $t_2 < t_3 \Rightarrow t_1 < t_3$ για οποιαδηποτε $t_1, t_2, t_3 \in S$

$\Sigma \subset S \times S$: μια σχέση είναι υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου

$(a,b) \in \Sigma$ Γράφω $a<b$

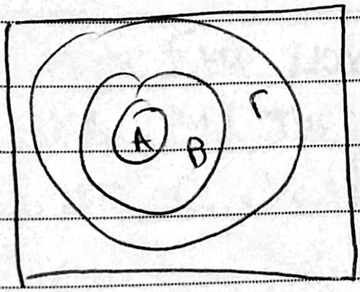
$S = \{1,2,3\}$

$$\left.\begin{matrix} 1<2 \\ 1<3 \\ 2<3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Sigma = \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$$

$(a,a) \notin \Sigma$ γιατί κανένα $a<a$!!!

$$\left.\begin{matrix} (t_1,t_2) \in \Sigma \\ (t_2,t_3) \in \Sigma \end{matrix}\right\} \Rightarrow (t_1,t_3) \in \Sigma$$

$\underline{O}$ S : το σύνολο των υποσυνόλων του $\underline{O}$



$\underline{O}$

$$\left.\begin{matrix} A \subset B \\ B \subset \Gamma \end{matrix}\right\} \Rightarrow A \subset \Gamma$$

$A < B \iff A \subsetneq B$ διά $A \subset B$

(απαιτώ τα i, ii της μερικής)

Ορισμός: Μια μερική διάταξη σε ένα σύνολο S ονομάζεται ολική διάταξη αν για οποιαδήποτε $t_1, t_2 \in S$ ισχύει ακριβώς μια από τις παρακάτω σχέσεις:

$t_1 < t_2$ ή $t_1 = t_2$ ή $t_2 < t_1$
$t_1 > t_2$

Π.χ. $\mathbb{C}$:
$\mathbb{R}$: $x<y \Rightarrow y-x>0$
$y-x \in \mathbb{R}^+$ } είναι μερική διάταξη

Στο $\mathbb{R}$ γίνεται ολική!!! γιατί οποιουσδήποτε αριθμούς πραγματικούς και αν μου δώσουν μπορώ να τους συγκρίνω ενώ στους πραγματικούς έχω μόνο μερική διάταξη γιατί $1+i$, 2017, η διαφορά του δεν ανήκει στο $\mathbb{R}^+$

Ορισμός: Μια μονωνυμική διάταξη στον $K[x_1, x_2, .., x_n]$ είναι μια ολική διάταξη $<$ στον Π^n με τις εξής ιδιότητες:

i) $1 < x^\alpha$ για κάθε $x^\alpha \in \Pi^n$ με $x^\alpha \neq 1$

ii) Αν $x^\alpha < x^\beta$ τότε $x^\alpha x^\gamma < x^\beta x^\gamma$ για οποιοδήποτε $x^\gamma \in \Pi^n$

(το 1 είναι το πιο μικρό μονώνυμο)

Παρατήρηση: Στον πολυωνυμικό δακτύλιο $K[x]$ έχουμε μόνο μια μονωνυμική διάταξη

- $1 < x < x^2 < x^3 < \dots < x^m < x^{m+1} < \dots$

Θέλω να συγκρίνω τα x^m, x^n αρκεί να συγκρίνω m, n (τους εκθέτες)

Έστω $m<n \Rightarrow n-m \in \mathbb{N}$

$1 < x^{n-m} \Rightarrow 1 \cdot x^m < x^{n-m} x^m \Rightarrow$
$x^m < x^n$

Για $n>1$ υπάρχουν άπειρες σε πλήθος διαφορετικές μονωνυμικές διατάξεις

<u>Ορισμός:</u> Η λεξικογραφική διάταξη $>_{lex}$ στον $K[x_1,..,x_n]$ με $x_1>x_2>...>x_n$ ορίζεται ως εξής:
$x^\alpha > x^\beta$ αν-ν η πρώτη μη μηδενική συντεταγμένη του $\alpha-\beta$ είναι θετική

<u>Παραδείγματα:</u>

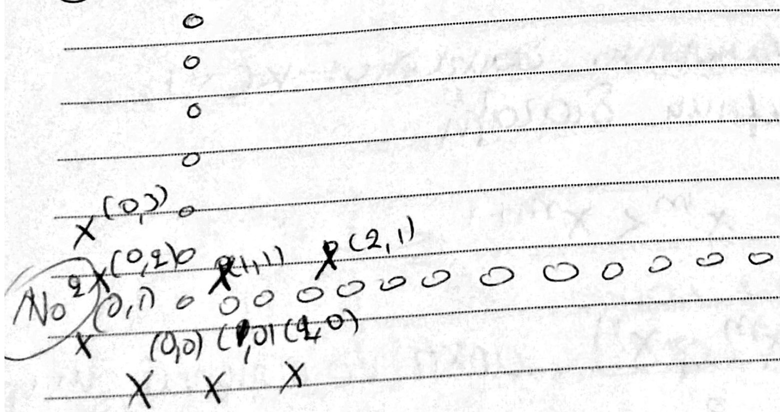
(1) $x_1^3 x_2^2 x_3^5 \overset{?}{>} x_1^2 x_2^{2017} x_3^{1000.743}$

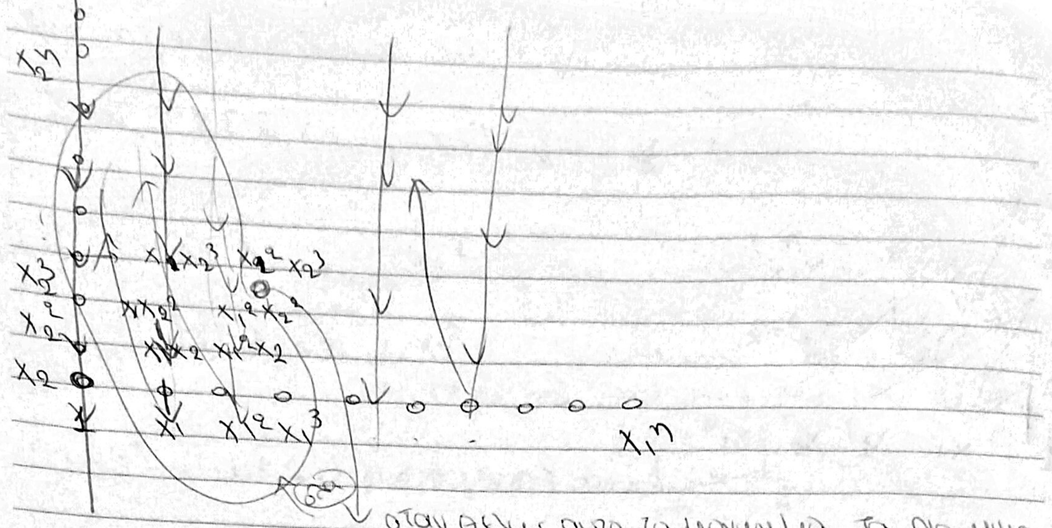
$$\begin{array}{ccc} \| & & \\ x^{(3,2,5)} & >_{lex} & x^{(2,2017,1.000.743)} \end{array}$$

$(3,2,5)-(2,2017,1000.743)=(1,-2015,-1.000.738)$

Εφόσον η πρώτη μη μηδενική συντεταγμένη είναι θετική τότε το πρώτο είναι πιο μεγάλο

(2) $K[x_1,x_2]$ $\qquad \pi^2$ (αντίστοιχη με το $\mathbb{N}_0^2$)





όταν θέλω αυτό το μονώνυμο, τα πιο μικρά από αυτό είναι άπειρα σε πλήθος

Έχω $n!$ λεξικογραφικές διατάξεις καθε μετάθεση των $1,2,..,n$ μας δίνει μια ~~νέα~~ λεξικ. διατ.

Ορισμός: Η βαθμωτή λεξικογραφική διάταξη $>_{deglex}$ στον $K[x_1,\dots,x_n]$ με $x_1>x_2>\dots>x_n$ ορίζεται ως εξής: $x^\alpha >_{deglex} x^\beta \Leftrightarrow \deg(x^\alpha) > \deg(x^\beta)$ ή

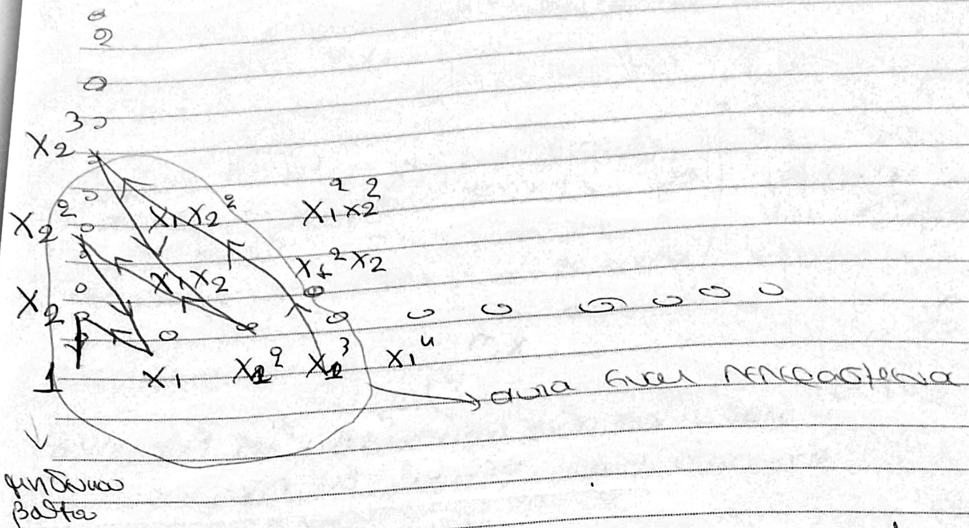
$\deg(x^\alpha) = \deg(x^\beta)$ και $x^\alpha >_{lex} x^\beta$

Πχ $x_1^3 x_2^7 x_3^{11} <_{deglex} x_1^2 x_2^5 x_3^{15}$

$\deg = 21$ $\qquad \deg = 22$

αν: $\underbrace{x_1^3 x_2^7 x_3^{11} \qquad x_1^2 x_2^5 x_3^{14}}_{\text{ίδιοι βαθμοί}}$

Εφόσον $3>2 \Rightarrow x_1^3 x_2^7 x_3^{11} >_{deglex} x_1^2 x_2^5 x_3^{14}$



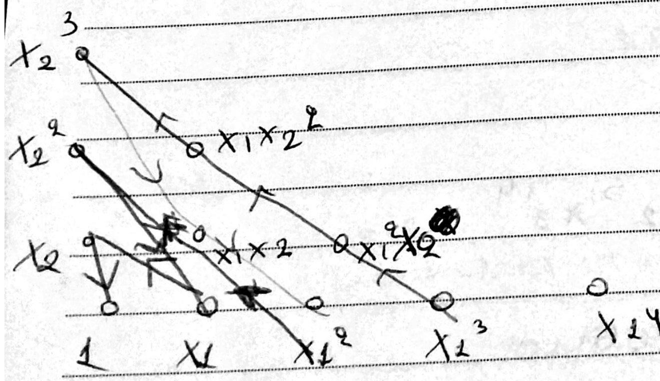
<u>Ορισμός:</u> Η αντίστροφη βαθμωτή λεξικογραφική διάταξη $>_{degrevlex}$ στον $k[x_1,\dots,x_n]$ με $x_1>x_2>\dots>x_n$ ορίζεται ως εξής: $x^\alpha >_{degrevlex} x^\beta$ αν $\deg(x^\alpha)>\deg(x^\beta)$

ή $\deg(x^\alpha)=\deg(x^\beta)$ και η τελευταία μη μηδενική συντεταγμένη του $\alpha-\beta$ είναι αρνητική

<u>παρ</u>

$k[x_1,x_2]$

Στο Π^2, οι διατάξεις deglex και degrevlex είναι ίδιες



Για $n \geq 3$ είναι διαφορετικές

Στον $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ για $n \geq 2$

π.χ. $x_1 x_3 >_{deglex} x_2^2$ πιο πολλά x_1

$x_1 x_3 <_{degrevlex} x_2^2$ αυτό έχουν ίδιο βαθμό ~ όσο πιο πολλά x_3 τόσο πιο μικρό

$(\alpha - \beta) = (1,0,1) - (0,2,0) = (\underline{\underline{1}}, -2, \underline{1})$

▸ $x^\alpha >_1 x^\beta \iff deg(x^\alpha) > deg(x^\beta)$

ή

$deg(x^\alpha) = deg(x^\beta)$

και η τελευταία μη μηδενική συνιστώσα του $\alpha - \beta$ είναι αρνητική

ουσιαστικά είναι deglex με $x_n > x_{n-1}$

Υπολογίζουμε καλύτερα η degrevlex

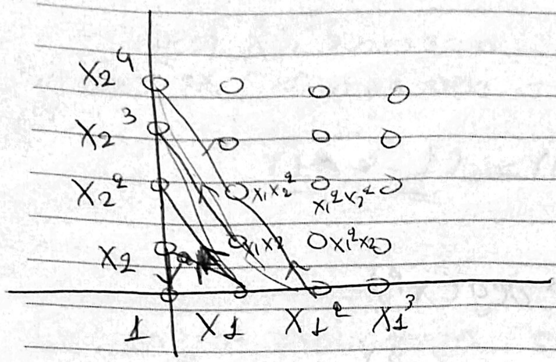
→ $K[x_1, x_2]$ $\quad d = (\kappa, \lambda)$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}^+$

$x^\alpha >_d x^\beta \overset{\text{ορίζεται}}{\iff} deg_d(x^\alpha) > deg_d(x^\beta)$

• $\underbrace{deg_d}_{d\text{-βαθμό}}(x^\alpha) = deg_d(x_1^{a_1} x_2^{a_2}) = \kappa a_1 + \lambda a_2 = d\alpha$ εσωτ. γινόμ ή $\deg_d(x^\alpha) = \deg_d(x^\beta)$

και $x^\alpha >_{lex} x^\beta$

$\boxed{\text{Πχ}}$ $d=(2,1)$



$2\alpha_1 + 1\cdot\alpha_2$

$\deg_d(x_1^{(1,0)}) = 2$

$\deg_d(x_2^{(0,1)}) = 1$

Το πιο μικρο το 1: που εχει βαθμο 0

→ $d=(n,1)$

$x^\alpha >_{(n,1)} x^\beta \Leftrightarrow \deg_{(n,1)}(x^\alpha) > \deg_{(n,1)}(x^\beta)$

ή $\deg_{(n,1)}(x^\alpha) \cancel{= \deg_{(n,1)}(x^\beta)}$ και $x^\alpha >_{lex} x^\beta$

$\deg_{(n,1)}(a_1, a_2) = na_1 + a_2$

Αν $\deg_{(n,1)}(x^{\alpha}) = \deg_{(n,1)}(x^{\beta}) \Rightarrow$

$n\alpha_1 + \alpha_2 = n\beta_1 + \beta_2$

$n\alpha_1 + \alpha_2 = n\beta_1 + \beta_2$

$n(\alpha_1 - \beta_1) = \beta_2 - \alpha_2$

$\underline{\boxed{1^{\eta}\ \text{περίπτωση}}}$ $\alpha_1 - \beta_1 = 0 \Rightarrow \beta_2 - \alpha_2 = 0 \Rightarrow$ $\alpha_1 = \beta_1 \Rightarrow$ $\beta_2 = \alpha_2$ $x^{\alpha} = x^{\beta}$

$\underline{\boxed{2^{\eta}\ \text{περιπ}}}$ $\alpha_1 - \beta_1 \neq 0$

$n = \dfrac{\beta_2 - \alpha_2}{\alpha_1 - \beta_1} \in \mathbb{Q}$ άτοπο

~~...~~ $\deg_{(n,1)}(x^{\alpha}) > \deg_{(n,1)}(x^{\beta})$

Γενική περίπτωση διάταξης:

$\rightarrow d_1 = (d_{11}, d_{12}, .., d_{1n})$

$d_2 = (d_{21}, d_{22}, .., d_{2n})$

$\vdots$

$d_\lambda = (d_{\lambda 1}, d_{\lambda 2}, .., d_{\lambda n})$

$x^{\alpha} \underset{d_1,..,d_\lambda}{>} x^{\beta} \overset{\text{ορισμός}}{\Leftrightarrow} \deg_{d_1}(x^{\alpha}) > \deg_{d_1}(x^{\beta})$

$\deg_{d_1}(x^{\alpha}) = d_1 \cdot \alpha = d_{11}\alpha_1 + d_{12}\alpha_2 + \dots + d_{1n}\alpha_n$

$\deg_{d_1}(x^\alpha) = \deg_{d_2}(x^\beta)$

και $\deg_{d_2}(x^\alpha) > \deg_{d_2}(x^\beta)$

ή

⋮

$\deg_{d_1}(x^\alpha) = \deg_{d_1}(x^\beta)$

και

$\deg_{d_2}(x^\alpha) = \deg_{d_2}(x^\beta)$

⋮

$\deg_{d_n}(x^\alpha) = \deg_{d_n}(x^\beta)$

και $x^\alpha >_{lex} x^\beta$

<u>Θεώρημα:</u> Στον $K[x_1, \dots, x_n]$ η λεξικογραφική διάταξη με $x_1 > x_2 > \dots > x_n$ είναι μονωνυμική διάταξη.

<u>απόδ.</u>

Έστω $x^\alpha >_{lex} x^\alpha$ $\Rightarrow$ η πρώτη μη μηδενική συντεταγμένη του $\alpha - \alpha = 0$ είναι θετική ΑΤΟΠΟ

Άρα δεν ισχύει $x^\alpha >_{lex} x^\alpha$

Έστω $x^{\alpha} < x^{\beta}$ και $x^{\beta} < x^{\gamma}$

$a_1 = \beta_1$, $a_2 = \beta_2$, $a_{i-1} = \beta_{i-1}$, $a_i < \beta_i$

$\beta_1 = \gamma_1$, $\beta_2 = \gamma_2$, ..., $\beta_{j-1} = \gamma_{j-1}$, $\beta_j < \gamma_j$

Θα καταλήξω σε $x^{a} < x^{\gamma}$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ

α) $\boxed{i<j}$: $a_1 = \gamma_1$, $a_2 = \gamma_2$, ..., $a_{i-1} = \gamma_{i-1}$

$a_i < \beta_i = \gamma_i$

$x^{a} <_{lex} x^{\gamma}$

β) $\boxed{i=j}$: $a_1 = \gamma_1$, $a_{i-1} = \gamma_{i-1}$, $a_i < \beta_i < \gamma_i$

$x^{a} <_{lex} x^{\gamma}$

γ) $\boxed{i>j}$: $a_1 = \gamma_1$, $a_2 = \gamma_2$, $a_{j-1} = \gamma_{j-1}$

$a_j = \beta_j < \gamma_j$

$x^{a} <_{lex} x^{\gamma}$